Lösung: Serie 9

1. Total beschränkte Mengen in vollständigen metrischen Räumen

"a⇒b": Wenn A total beschränkt ist, dann ist auch $\overline{A}$ total beschränkt (wenn $A \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \epsilon)$, dann gilt $\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^n \overline{B(x_j, \epsilon)} \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, 2\epsilon)$). Die abgeschlossene Menge $\overline{A}$ ist vollständig weil (E, d) vollständig ist. Damit ist $\overline{A}$ total beschränkt und vollständig, also kompakt.
"b⇒a": Da $\overline{A}$ kompakt, ist $\overline{A}$ total beschränkt, insbesondere ist auch die Teilmenge A total beschränkt.

2. Arzelà-Ascoli: Kompaktheit in Räumen von stetigen Funktionen

Sei $(E, \mathcal{T})$ ein kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{F} \subset C(E, \mathbb{C})$ gleichgradig stetig sowie punktweise beschränkt. Um zu zeigen dass $\mathcal{F}$ in $(C(E, \mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ total beschränkt ist, geben wir $\epsilon > 0$ vor. Wir zeigen Folgendes:

1) Es existieren offene Mengen $U_1, \ldots, U_n \subset E$ mit $E = \bigcup_{i=1}^n U_i$, und Punkte $x_i \in U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ so dass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\forall f \in \mathcal{F} \ \forall y \in U_j : \quad |f(y) - f(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon$$

2) Es gibt eine endliche Menge $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$ welche in $\{f(x_j) : f \in \mathcal{F},\ 1 \leq j \leq n\}$ $\frac{1}{4}\epsilon$-dicht ist (d.h., "jedes $f(x_j)$ hat Distanz kleiner als $\frac{1}{4}\epsilon$ zu einem z_k"). Mit $A := \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $B := \{z_1, \ldots, z_m\}$ ist B^A endlich und es gilt

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\phi \in B^A} \mathcal{F}_\phi, \text{ wobei } \quad \mathcal{F}_\phi := \{f \in \mathcal{F} : |f(x_j) - \phi(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon \text{ für } 1 \leq j \leq n\}.$$

3) $\mathrm{diam}(\mathcal{F}_\phi) \leq \epsilon$ für alle $\phi \in B^A$.

(Hier bezeichnet $\mathrm{diam}(X) := \sup\{d_{\mathrm{glm}}(f, g) : f, g \in X\}$ den Durchmesser einer Menge $X \subset C(E, \mathbb{C})$ bezüglich der gleichförmigen Metrik d_{glm}.)

Gemäss (2)&(3) ist dann $\mathcal{F}$ eine endliche Vereinigung der Mengen $\mathcal{F}_\phi$ $(\phi \in B^A)$ welche Durchmesser kleiner gleich ϵ haben. Durch Wählen eines Elementes in jeder nichtleeren Menge $\mathcal{F}_\phi$ $(\phi \in B^A)$ bekommen wir also eine endliche ϵ-dichte Teilmenge von $\mathcal{F}$, d.h., $\mathcal{F}$ ist in $(C(E, \mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ total beschränkt. Weiter ist der metrische Raum $(C(E, \mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ vollständig, siehe unten. Mit Aufgabe 1 folgt daraus dass der Abschluss von $\mathcal{F}$ in $(C(E, \mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ kompakt ist.

Beachte dass aufgrund der Kompaktheit von $(E, \mathcal{T})$ alle stetigen Funktionen $E \to \mathbb{C}$ beschränkt sind, so dass in diesem Fall d_{glm}, gegeben durch (siehe auch Serie 1, Aufgabe 6b)

$$d_{\mathrm{glm}}(f,g) := \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| \qquad (f, g \in B(E,\mathbb{C})),$$

auf dem Raum $C(E,\mathbb{C})$ aller stetigen Funktionen $E \to \mathbb{C}$ wohldefiniert ist. Weiter bemerken wir dass $C(E,\mathbb{C})$ in $(B(E,\mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ abgeschlossen ist, wobei letzterer Raum vollständig ist weil $\mathbb{C}$ vollständig ist. Deswegen ist auch $(C(E,\mathbb{C}), d_{\mathrm{glm}})$ vollständig.

Wir verifizieren nun (1)-(3).

(1) Da $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig ist, existiert für jedes $x \in E$ eine offene Umgebung U_x von x so dass

$$\forall f \in \mathcal{F}\ \forall y \in U_x : \quad |f(y) - f(x)| < \frac{1}{4}\epsilon.$$

$\{U_x\}_{x\in E}$ ist eine Überdeckung des kompakten Raum $(E, \mathcal{T})$ durch offene Mengen, es existieren also $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} = E$. Wir schreiben $U_i := U_{x_i}$.

(2) Wegen der punktweisen Beschränktheit von $\mathcal{F}$ ist $\bigcup_{j=1}^n \{f(x_j) : f \in \mathcal{F}\}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, es existiert also eine endliche Teilmenge $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$ welche in ihr $\frac{1}{4}\epsilon$-dicht ist – das heisst, jedes $f(x_j)$ hat Distanz kleiner als $\frac{1}{4}\epsilon$ zu einem z_k. Schreibe $A := \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $B := \{z_1, \ldots, z_m\}$; die Menge B^A aller Funktionen von A nach B ist endlich. Weil $\{z_1, \ldots, z_m\}$ in $\bigcup_{j=1}^n \{f(x_j) : f \in \mathcal{F}\}$ $\frac{1}{4}\epsilon$-dicht ist, gilt

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\phi \in B^A} \mathcal{F}_\phi, \text{ wobei } \quad \mathcal{F}_\phi := \{f \in \mathcal{F} : |f(x_j) - \phi(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon \text{ für } 1 \le j \le n\}.$$

(3) Sei $\phi \in B^A$ und $f, g \in \mathcal{F}_\phi$. Weil $|f - \phi| < \frac{1}{4}\epsilon$ auf A und $|g - \phi| < \frac{1}{4}\epsilon$ auf A, haben wir $|f - g| < \frac{1}{2}\epsilon$ auf A. Für $x \in E = \bigcup_{i=1}^n U_i$ existiert ein j mit $x \in U_j$. Wegen (1) gilt dann $|f(x) - f(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon$, $|g(x) - g(x_j)| < \frac{1}{4}\epsilon$, und wir bekommen

$$|f(x) - g(x)| \le |f(x) - f(x_j)| + \underbrace{|f(x_j) - g(x_j)|}_{< \frac{1}{2}\epsilon} + |g(x_j) - g(x)| < \epsilon.$$

Also gilt $\sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| \le \epsilon$.

3. Tychonoff und das Produkt von nichtleeren Mengen

(a) Es ist offensichtlich, dass die Räume A^* kompakt sind (die Topologien $\mathcal{T}_{A^*}$ sind alle endlich). Somit ist nach dem Satz von Tychonoff auch das Produkt P^* kompakt.
(b) Sei $x \in P$. Dann muss für alle $A \in \mathcal{A}$ gelten, dass $\pi_A(x) \in A$ ist. Somit ist $x \in \pi_A^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Somit ist

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \pi_A^{-1}(A) \supset P$$

gezeigt. Sei nun $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \pi_A^{-1}(A)$. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, dass $\pi_A(x) \in A$. Folglich ist $x \in P$ und "$\subset$" ist ebenfalls gezeigt.
(c) Jedes $A \in \mathcal{A}$ ist abgeschlossen in $(A^*, \mathcal{T}_{A^*})$, denn $A^* \backslash A = \{\infty\} \in \mathcal{T}_{A^*}$. Weil die Projektionen $\pi_A : P^* \to A^*$ stetig sind (P^* ist mit der Produkttopologie versehen) ist damit $\{\pi_A^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ eine Familie von *abgeschlossenen* Teilmengen in P^*. Wir zeigen dass diese Familie die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt.
Sei $\{A_i\}_{i=1}^n$ ein endliche Teilfamilie von $\mathcal{A}$. Da $A_1, \ldots, A_n$ alle nichtleer sind, können wir Elemente $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ wählen. Dies ist möglich, da wir nur endlich viele nichtleere Mengen betrachten. Wir benötigen dazu das Auswahlaxiom nicht. Wir betrachten nun das Element $x = (x_A)_{A \in \mathcal{A}} \in P^*$ gegeben durch

$$x_A = \begin{cases} a_i & \text{falls } A = A_i \text{ mit } 1 \leq i \leq n, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, dass dieses Element existiert, da dazu keine Auswahl nötig ist. Es gilt nun für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, dass $\pi_{A_i}(x) = a_i \in A_i \subset A_i^*$. Damit ist

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{A_i}^{-1}(A_i)$$

gezeigt und folglich besitzt $\{\pi_A^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ die endliche Durchschnittseigenschaft.
Da $\{\pi_A^{-1}(A)\}_{A \in \mathcal{A}}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen in P^* ist welche die endliche Durchschnittseigenschaft besitzt, und weil P^* kompakt ist, gilt gemäss der Charakterisierung von Kompaktheit durch abgeschlossene Mengen,

$$P \overset{\text{(b)}}{=} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \pi_A^{-1}(A) \neq \emptyset.$$

4. Produkttopologie und Abschluss

"$\subset$": Aufgrund der Stetigkeit der π_β (wir benutzen Serie 2, Aufgabe 4b),

$$\pi_\beta(\overline{\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}) \subset \overline{\pi_\beta(\prod_{\alpha\in A} B_\alpha)} = \overline{B_\beta}.$$

Dies zeigt "$\subset$".
"$\supset$": Gegeben $x \in \prod_{\alpha\in A} \overline{B_\alpha}$, so zeigen wir dass $(\prod_{\alpha\in A} B_\alpha) \cap U \neq \emptyset$ für jede offene Menge U die x enthält; dies ist äquivalent zu $x \in \overline{\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}$. Die letztere Äquivalenz bleibt wahr wenn wir annehmen dass U ein Basiselement der Produkttopologie ist.
Dann gilt insbesondere $U = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha$ für offene $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ mit $x_\alpha \in U_\alpha$ ($U_\alpha = E_\alpha$ für fast alle α, dies ist hier aber nicht relevant). Weil $x_\alpha \in \overline{B_\alpha}$, haben wir $B_\alpha \cap U_\alpha \neq \emptyset$ ($\alpha \in A$), und folglich

$$(\prod_{\alpha\in A} B_\alpha) \cap U = \prod_{\alpha\in A} (B_\alpha \cap U_\alpha) \neq \emptyset,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung benutzen dass jedes Produkt von nichtleeren Mengen nichtleer ist (hier benutzen wir das Auswahlaxiom).

5. Produkt von Hausdorffräumen

Sei $\{X_i : i \in \mathcal{I}\}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Seien $x = (x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ und $y = (y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ zwei verschiedene Punkte des Produktraums $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$. Weil $x \neq y$ ist, gibt es einen Index $j \in \mathcal{I}$ so, dass $x_j \neq y_j$. Da X_j Hausdorff ist, existieren zwei disjunkte offene Mengen U und V in X_j mit $x_j \in U$ und $y_j \in V$. Dann sind $\pi_j^{-1}(U)$ und $\pi_j^{-1}(V)$ zwei disjunkte offene Mengen in $\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i$ mit $x \in \pi_j^{-1}(U)$ und $y \in \pi_j^{-1}(V)$.